28.11.23 1ст

математика

Контрольная работа по теме: «Применение производных»

f(x)	$f'(x)$
C - const	0
x	1
Kx + b	k
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^n	$n * x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
sin x	cosx
cosx	- sinx
e^x	e^x
a^x	$a^x * \ln a$
lna	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x * \ln a}$
tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
ctgx	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Правила вычисления производных

1. $(U + Y)' = U' + Y'$	3. $(U * Y)' = U' * Y + U * Y'$
2. $(k * U)' = k * (U)'$	4. $\left(\frac{U}{Y}\right)' = \left(\frac{U' * Y - U * Y'}{Y^2}\right)$

Вы уже знаете), что построение графика функции лучше начинать с ее исследования, которое состоит в том, что для данной функции: 1) находят ее область определения; 2) выясняют, является ли функция f четной или нечетной, является ли периодической. Далее находят: 3) точки пересечения графика с осями координат; 4) промежутки знакопостоянства; 5) промежутки возрастания и убывания; 6) точки экстремума и значения f в этих

точках и 7) исследуют поведение функции в окрестности «особых» точек и при больших по модулю x.

На основании такого исследования строится график функции.

Исследование функции на возрастание (убывание) и на экстремум удобно проводить с помощью производной. Для этого сначала находят производную функции f и ее критические точки, а затем выясняют, какие из них являются точками экстремума.

■ Пример 1. Исследуем функцию $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$ и построим ее график.

Проведем исследование по указанной схеме.

1) $D(f) = \boldsymbol{R}$, так как f — многочлен.

2) Функция f не является ни четной, ни нечетной (докажите это самостоятельно).

3), 4) График f пересекается с осью ординат в точке $(0; f(0))$; чтобы найти точки пересечения с осью абсцисс, надо решить уравнение $3x^5 - 5x^3 + 2 = 0$, один из корней которого ($x = 1$) легко находится. Другие корни (если они есть) могут быть найдены только приближенно. Поэтому для данной функции остальные точки пересечения графика с осью абсцисс и промежутки знакопостоянства мы находить не будем (как уже отмечалось в п. 4, приведенная схема имеет примерный характер).

5), 6) Найдем производную функции f:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1).$$

$D(f') = \boldsymbol{R}$, поэтому критических точек, для которых $f'(x)$ не существует, нет.

Заметим, что $f'(x) = 0$, если $x^2(x^2 - 1) = 0$, т. е. при значениях аргумента, равных 0, −1 и 1. Рассматриваемая функция имеет три критические точки.

Составляем таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	2	↘	0	↗
		max				min	

В первой строке этой таблицы указаны в порядке возрастания критические точки функции и ограниченные ими промежутки. Во второй строке отмечены знаки производной на этих промежутках. (На каждом таком интервале знак производной не меняется, его можно найти, определив знак производной в какой-либо точке рассматриваемого интервала.) В третьей строке записаны выводы о ходе изменения данной функции: «↗» — возрастает, «↘» — убывает, а в четвертой — о виде критических точек (пп. 5

и 6 приведенной выше схемы). Критическая точка 0 функции f не является точкой экстремума, поэтому в четвертой строке таблицы она не отмечена. Заметим, что вывод о ходе изменения функции на промежутке между критическими точками часто можно сделать, сравнив значения функции на концах этого промежутка (вместо определения знака производной). Например, $f(0) < f(-1)$, поэтому на промежутке $(-1; 0)$ функция убывает (и, следовательно, $f' < 0$ на этом промежутке).

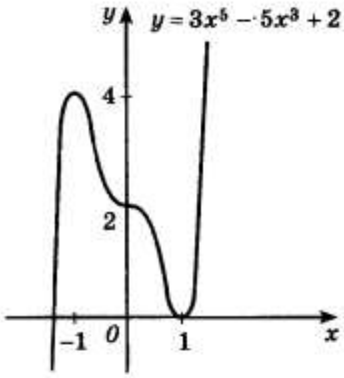

Рис. 111

Строим график функции (рис. 111). Строить его удобно по промежуткам, которые указаны в таблице. Например, в таблице указано, что f убывает на интервале $(0; 1)$. Функция f непрерывна в точках 0 и 1 (так как она непрерывна всюду), следовательно, она убывает на отрезке $[0; 1]$. Поэтому рисуем график убывающим на отрезке $[0; 1]$ от значения $f(0) = 2$ до значения $f(1) = 0$. При этом касательные к графику в точках 0, ± 1 должны быть горизонтальными — во второй строке таблицы сказано, что в этих точках производная равна нулю. Аналогично строится график и на остальных промежутках.

Выполнить задания: исследовать функцию с помощью производной и постройте график функции

а) $f(x) = x^2 - 2x + 8;$

в) $f(x) = -x^2 + 5x + 4;$